

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Έστω ένας γραμμικός σταθμητός χώρος V εξοπλισμένος με τη νόρμα $\|\cdot\|$ και W ένας υπόχωρος του V . Δοθέντος $v \in V$ να βρεθεί $w^* \in W$ τέτοιο ώστε:

$$\|v - w^*\| \leq \|v - w\|, \quad \forall w \in W$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω $V = C[a, b]$ (χώρος συνεχών συναρτήσεων) και $W = P_n$ πολυώνυμο το πολύ n βαθμού, $\|\cdot\|_\infty$, βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση.

$f \in C[a, b]$ να βρεθεί $p^* \in P_n$ τέτοιο ώστε $\|f - p^*\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p^*(x)| \leq \|f - p\| =$

$$= \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)| \quad \forall p \in P_n$$

2η διατύπωση: $\min_{p \in P_n} \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p^*(x)|$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω V ένας γραμμικός σταθμητός χώρος. Νόρμα στον V είναι μια συνάρτηση $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}^{+,0}$ ώστε να ισχύουν οι ιδιότητες:

- i) $\|v\| \geq 0$, $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, (ή $\lambda \in \mathbb{C}$)
- iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (τριγωνική ανισότητα).

• $V = C[a, b]$

Νόρμες

- ♦ ℓ_1 -νόρμα: $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$
- ♦ ℓ_2 -νόρμα: $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$

- ♦ ℓ_∞ -νόρμα: $\|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$.

Γενική νόρμα: ℓ_p -νόρμα: $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$, $p \geq 1$

Αποδεικνύεται ότι : $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$

• $V = E_n$, $X_m = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $E_n : f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$

♦ l_1 -νόρμα: $\|f\|_1 = \sum_{i=1}^n |f_i|$

♦ l_2 -νόρμα: $\|f\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right)^{1/2}$

♦ l_∞ -νόρμα: $\|f\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |f_i|$

♦ l_p -νόρμα: $\|f\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^p \right)^{1/p}$, $p \geq 1$.

Ισχύει ότι : $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$

Ανισότητα Minkowski

$$\text{Συνεχής: } \left(\int_a^b |v(x) + u(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |v(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

$$\text{Διακριτή: } \left(\sum_{i=1}^n |v_i + u_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^p \right)^{1/p}$$

$$\|v + u\|_p \leq \|v\|_p + \|u\|_p$$

Ανισότητα Hölder

$$\text{Συνεχής: } \int_a^b |v(x) \cdot u(x)| dx \leq \left(\int_a^b |v(x)|^p dx \right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |u(x)|^q dx \right)^{1/q}, \quad p \geq 1$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Διακριτή: $\sum_{i=1}^n |v_i \cdot u_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^q \right)^{1/q}, p \geq 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

Ανισότητα Cauchy-Schwartz (C-S)

Συνεχής: $\int_a^b |v(x) \cdot u(x)| dx \leq \left(\int_a^b |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$

Διακριτή: $\sum_{i=1}^n |v_i \cdot u_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^2 \right)^{1/2}.$

ΑΣΚΗΣΗ: Ν.δ.ο. $\int_a^b |v(x) \cdot u(x)| dx \leq \int_a^b |v(x)| dx \cdot \max_{a \leq x \leq b} |u(x)|.$

ΛΥΣΗ: $\int_a^b |v(x)| |u(x)| dx \leq \int_a^b |v(x)| \cdot \max_{a \leq y \leq b} |u(y)| dx =$
 $= \int_a^b |v(x)| dx \cdot \max_{a \leq y \leq b} |u(y)| = \|v\|_1 \cdot \|u\|_\infty$

Το ίδιο γίνεται και με τα αθροίσματα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Cauchy-Schwartz: θεωρούμε $0 \leq \int_a^b (|v(x) + \theta |u(x)|)^2 dx =$
 $= \int_a^b |v(x)|^2 dx + 2\theta \int_a^b |v(x) \cdot u(x)| dx + \theta^2 \int_a^b |u(x)|^2 dx, \theta \in \mathbb{R}$

Παρατηρώ ότι ως προς θ θα έχω ένα τριώνυμο.
 $\Delta \leq 0 : 4 \left(\int_a^b |v(x) \cdot u(x)| dx \right)^2 - 4 \int_a^b |v(x)|^2 dx \int_a^b |u(x)|^2 dx$
 $\Rightarrow \int_a^b |v(x) \cdot u(x)| dx \leq \left(\int_a^b |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$

Εσωτερικό γινόμενο συνεχών πραγματικών συναρτήσεων

$(v, u) = \int_a^b v(x) \cdot u(x) dx$

Για μιγαδικές συναρτήσεις

$(v, u) = \int_a^b \overline{v(x)} \cdot u(x) dx, v, u \in C[a, b]$

$(v, u) = \sum \overline{v_i} u_i$

$(v, v) = \|v\|_2^2$

$$(v, v) = \int_a^b \overline{v(x)} \cdot v(x) dx = \int_a^b |v(x)|^2 dx = \|v\|_2^2$$

ΑΣΚΗΣΗ: Ν.δ.ο η έκφραση $\int_a^b |x f(x)| dx$, $f \in C[a, b]$ αποτελεί νόρμα στον $C[a, b]$

ΛΥΣΗ: Θα εξετάσουμε τις 3 ιδιότητες, $g(f) = \int_a^b |x f(x)| dx$

i) $g=0$ αν $f=0$

ii) $g(\lambda f) = \int_a^b |x \lambda f(x)| dx = |\lambda| \int_a^b |x f(x)| dx = |\lambda| \cdot g(f)$

iii) $g(f+h) = \int_a^b |x(f(x)+h(x))| dx \leq \int_a^b |x f(x)| dx + \int_a^b |x \cdot h(x)| dx = g(f) + g(h)$

Ισχύουν οι 3 ιδιότητες άρα είναι νόρμα.

ΑΣΚΗΣΗ: i) $\sum_{i=1}^m i |f_i|$, αποτελεί νόρμα στον E_m

ii) $\sum_{i=1}^m (i-1) |f_i|$, δεν αποτελεί νόρμα στον E_m

ΛΥΣΗ:

ii) Έστω $f = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^T$, τότε $\sum_{i=1}^m (i-1) |f_i| = 0$, ενώ η $f \neq 0$, άρα δεν ισχύει η 1^η ιδιότητα, άρα δεν αποτελεί νόρμα στον E_m

ΑΣΚΗΣΗ: 1) $\|f\|_2^2 \leq \|f\|_2 \cdot \|f\|_\infty$ και 2) $\|f\|_1 \leq \sqrt{2} \|f\|_2$, $\forall f \in C[-1, 1]$

ΛΥΣΗ: 1) $\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx \leq \int_{-1}^1 |f(x)| \cdot \max_{-1 \leq y \leq 1} |f(y)| dx = \int_{-1}^1 |f(x)| dx \cdot \max_{-1 \leq y \leq 1} |f(y)| = \|f\|_1 \cdot \|f\|_\infty$

2) $\|f\|_1 = \int_{-1}^1 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 |1 \cdot f(x)| dx \stackrel{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} \left(\int_{-1}^1 1^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \sqrt{2} \cdot \|f\|_2$

ΑΣΚΗΣΗ: $\|f\|_2^2 \leq \|f\|_2 \cdot \|f\|_\infty$ και $\|f\|_1 \leq \sqrt{m} \cdot \|f\|_2$, $\forall f \in (E_m) \rightarrow$ διακριτός χώρος.

ΛΥΣΗ: 1) $\sum_{i=1}^m |f_i|^2 \leq \sum_{i=1}^m |f_i| \cdot \max_{1 \leq j \leq m} |f_j| = \|f\|_1 \cdot \|f\|_\infty$

2) $\|f\|_1 = \sum_{i=1}^m |f_i| \stackrel{C-S}{\leq} \sum_{i=1}^m |1 \cdot f_i| \leq \left(\sum_{i=1}^m 1^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^m |f_i|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{m} \cdot \|f\|_2$

ΘΕΩΡΗΜΑ Ύπαρξης βέλτιστης προσέγγισης: Έστω V σταθμισμένος γραμμικός χώρος εφοδιασμένος με τη νόρμα $\|\cdot\|$ και W υποχώρος του V πεπερασμένης διάστασης. Τότε δοθέντος $v \in V$ υπάρχει $w^* \in W$ τέτοια ώστε $\|v - w^*\| \leq \|v - w\|$, $\forall w \in W$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω $V = C[a, b] = C[0, 1/2]$ και W είναι ο χώρος όλων των πολυωνύμων οποιουδήποτε βαθμού. Έστω $f = \frac{1}{1-x} \in C[0, 1/2]$, $f \notin W$

Γνωρίζουμε ότι $(\forall \varepsilon > 0) (\exists n \in \mathbb{N})$ τέτοιο ώστε $|f(x) - (1 + x + x^2 + \dots + x^n)| \leq \varepsilon$
 $\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$

Αν υπήρχε βέλτιστη προσέγγιση w^* θα ήταν $\|f - w^*\| = 0 \Leftrightarrow w^* = f = \frac{1}{1-x}$

άρα $w^* \notin W$, άρα δεν υπάρχει βέλτιστη προσέγγιση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $V = C[a, b]$, $W = P_n$, με νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ } $\Rightarrow$
 $V = E_m$, $W = P_n$, με νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ }

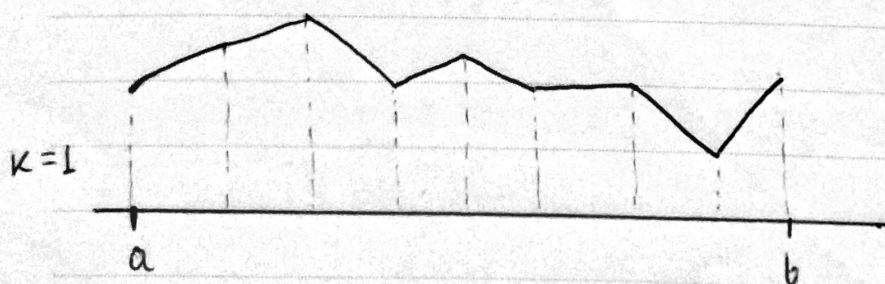
Βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση

" " " " με νόρμα $\|\cdot\|_2$ } $\Rightarrow$
 " " " " με νόρμα $\|\cdot\|_2$ }

Βέλτιστη προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $V = C[a, b]$, $\chi_m = \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m\}$, $a = \chi_1 \leq \chi_2 \leq \dots \leq \chi_m = b$

W ο χώρος των τμηματικά συνεχών πολυωνύμων k βαθμού στα διαστήματα $[\chi_i, \chi_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, m-1$



$(k+1)(m-1)$ η διάσταση του χώρου.

Έστω $V = C_{2\pi}[0, 2\pi]$: ο χώρος όλων των περιοδικών συναρτήσεων με περίοδο 2π .

$W = S_{2k+1}$ των τριγωνομετρικών πολυωνύμων k βαθμού είναι $S = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i \cos ix + \sum_{i=1}^k b_i \sin ix$

Ο S_{2k+1} είναι διάστασης $2k+1$, $\exists$ η βέλτιστη προσέγγιση.

